

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 5

## Математическое ожидание

$$E(x) = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x w(x) dx$$

$$E(x) = \langle x \rangle = \sum_k x_k p_k$$

---

$$y = f(x)$$

$$E(y) = \langle y \rangle = \langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) w(x) dx$$

$$E(y) = \langle y \rangle = \langle f(x) \rangle = \sum_{k=1}^K f(x_k) p_k$$

---

$$y = x^n, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

начальные моменты:

$$m_x^{(n)} = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x) dx$$

центральные моменты:

$$\mu_x^{(n)} = \langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^n w(x) dx$$

Математическое ожидание случайной величины  $x$   
(первый начальный момент)

$$m_x^{(1)} = E(x) = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx$$

Дисперсия случайной величины  $x$   
(второй центральный момент):

$$\sigma_x^2 = \mu_x^{(2)} = D(x) = E\left(\left(x - \langle x \rangle\right)^2\right)$$

$$\sigma_x^2 = \left\langle \left(x - \langle x \rangle\right)^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \langle x \rangle\right)^2 w(x)dx$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

## Производящая функция моментов (ПФМ)

$$M_x^{(I)} = \langle e^{xu} \rangle \quad \text{— ПФМ начальных моментов}$$

$$M_x^{(I)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xu} w(x) dx$$

$$M_x^{(I)} = \sum_k e^{x_k u} p_k$$

---

$$M_x^{(C)} = \langle e^{(x-\langle x \rangle)u} \rangle \quad \text{— ПФМ центральных моментов}$$

$$M_x^{(C)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-\langle x \rangle)u} w(x) dx$$

$$M_x^{(C)} = \sum_k e^{(x_k - \langle x \rangle)u} p_k$$

# ПФМ для нормального распределения

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot A} e^{-\frac{(x-B)^2}{2A^2}}$$

$$M_x^{(I)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xu - \frac{(x-B)^2}{2A^2}} dx$$

$$M_x^{(I)} = e^{\left(\frac{A^2 u^2}{2} + uB\right)} \left( \text{при расчетах использовано: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \right)$$

$$\left. \frac{dM_x^{(I)}}{du} \right|_{u=0} = m_x^{(1)} = \langle x \rangle = B \quad \left. \frac{d^2 M_x^{(I)}}{du^2} \right|_{u=0} = m_x^{(2)} = \langle x^2 \rangle = B^2 + A^2$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - (\langle x \rangle)^2 = A^2 \quad \sigma_x = A$$

Отсюда обычный вид нормального распределения:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2}} \quad \text{или} \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma_x^2}}$$

ПФМ для начальных моментов:

$$M_x^{(I)} = e^{\left(\frac{\sigma_x^2 u^2}{2} + u\langle x \rangle\right)}$$

ПФМ для центральных моментов:

$$M_x^{(C)} = e^{\frac{\sigma_x^2 u^2}{2}}$$

## ПФМ биномиального распределения

$$\begin{aligned} M_n^{(I)} &= \langle e^{nu} \rangle = \sum_{n=0}^N e^{nu} P_N(n) = \sum_{n=0}^N e^{nu} C_N^n p^n (1-p)^{N-n} = \\ &= \sum_{n=0}^N C_N^n (e^u p)^n (1-p)^{N-n} = (e^u p + 1 - p)^N \end{aligned}$$

---

Первый  
начальный момент:

$$\begin{aligned} m_n^{(1)} &= \left. \frac{dM_n^{(I)}}{du} \right|_{u=0} = N (e^u p + 1 - p)^{N-1} p e^u \Big|_{u=0} = \\ &= N (p + 1 - p)^{N-1} p = Np \end{aligned}$$

Второй  
начальный момент:

$$m_n^{(2)} = \left. \frac{d^2 M_n^{(I)}}{du^2} \right|_{u=0} = N(N-1)p^2 + Np$$

Второй  
центральный момент:

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \mu_n^{(2)} = m_n^{(2)} - (m_n^{(1)})^2 = \\ &= N(N-1)p^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p) \end{aligned}$$

ПФМ распределения Пуассона.

$$\begin{aligned} M_n^{(I)} &= \langle e^{nu} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t} = \\ &= e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t e^u)^n}{n!} = e^{-\alpha t} e^{\alpha t e^u} = e^{\alpha t(e^u - 1)} \end{aligned}$$

---

Первый  
начальный момент:  $m_n^{(1)} = \left. \frac{dM_n^{(I)}}{du} \right|_{u=0} = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} e^{\alpha t(e^u - 1)} = e^{\alpha t(e^u - 1)} \alpha t e^u \Big|_{u=0} = \alpha t$

Второй  
начальный момент:  $m_n^{(2)} = \left. \frac{d^2 M_n^{(I)}}{du^2} \right|_{u=0} = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} e^{\alpha t(e^u - 1)} \alpha t e^u = (\alpha t)^2 + \alpha t$

Второй  
центральный момент:  $\sigma_y^2 = \mu_y^{(2)} = m_x^{(2)} - \left(m_x^{(1)}\right)^2 = (\alpha t)^2 + \alpha t - (\alpha t)^2 = \alpha t$