

СЕМИНАР 4

Система двух автономных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (ОДУ). Решение системы двух линейных автономных ОДУ. Типы особых точек.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Перейдем к изучению систем уравнений. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений. В общем виде систему линейных уравнений можно представить в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (4.1)$$

Анализ системы уравнений начинается с нахождения стационарных состояний. У систем вида (4.1) особая точка единственна, ее координаты – (0,0). Исключение составляет вырожденный случай, когда уравнения можно представить в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = kax + kby. \end{cases} \quad (4.1^*)$$

В этом случае все пары (\bar{x}, \bar{y}) , удовлетворяющие соотношению $\bar{y} = -\frac{a\bar{x}}{b}$, являются стационарными точками системы (4.1*). В частности, точка $(0,0)$ также является стационарной для системы (4.1*). На фазовой плоскости (см. Семинар 5) в данном случае имеем прямую с коэффициентом наклона $-\frac{a}{b}$, проходящую через начало координат, каждая точка которой является особой точкой системы (4.1*) (см. таблицу 4.1, пункт 6).

Основной вопрос, на который должен отвечать результат исследования системы уравнений: устойчиво ли стационарное состояние системы, и какой характер имеет ее решение (монотонный или немонотонный).

Напомним, что решением системы уравнений (4.1) на некотором интервале времени является пара функций $x(t), y(t)$, результатом подстановки которых в оба уравнения системы является верное тождество на том же временном интервале.

Какими же должны быть функции $x(t), y(t)$, «предтендующие» на то, чтобы быть решением исследуемой системы уравнений? После подстановки функций-«кандидатов» в исходные уравнения, в левой части будут стоять их производные, а в правой – сами функции. При этом должно выполняться равенство между частями уравнения. Только экспоненциальная функция $f(z) = e^z$ остается после дифференцирования функцией того же вида. Таким образом, общее решение системы уравнений (4.1) необходимо искать среди функций вида:

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda t}, \quad y(t) = B \cdot e^{\lambda t}, \quad (4.2)$$

где A, B, λ – некоторые неизвестные константы. Определив значения этих трех неизвестных, получим общее решение системы.

Подставим функции (4.2) в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = a \cdot (A \cdot e^{\lambda t}) + b \cdot (B \cdot e^{\lambda t}), \\ \frac{dy}{dt} = B \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} = c \cdot (A \cdot e^{\lambda t}) + d \cdot (B \cdot e^{\lambda t}). \end{cases}$$

Сокращая на ненулевой множитель $e^{\lambda t}$, получаем:

$$\begin{cases} A \cdot \lambda = a \cdot A + b \cdot B, \\ B \cdot \lambda = c \cdot A + d \cdot B. \end{cases} \quad (4.3)$$

Система (4.3) представляет собой алгебраическую систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных A, B :

$$\begin{cases} (a - \lambda) \cdot A + b \cdot B = 0, \\ c \cdot A + (d - \lambda) \cdot B = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Система уравнений (4.4) имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов системы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5)$$

Раскрывая определитель (4.5), получаем *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (4.6)$$

Квадратное уравнение (4.6) имеет два решения λ_1 и λ_2 , при которых возможны ненулевые значения констант A, B для решения (4.2) системы уравнений. Каждому из значений $\lambda_{1,2}$ соответствует свой набор констант, а *общее решение* системы двух дифференциальных уравнений (4.1) является суммой двух линейно-независимых решений:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}; \\ y(t) = C_1 \chi_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \chi_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Здесь константы $C_{1,2}$ определяются начальными условиями задачи, а коэффициенты $\chi_{1,2}$ зависят от характеристических значений $\lambda_{1,2}$ и задаются формулами:

$$\chi_1 = \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_1 - d}, \quad \chi_2 = \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_2 - d}.$$

Характеристические числа $\lambda_{1,2}$ выражаются через коэффициенты линейных уравнений следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} \right). \quad (4.8)$$

Разберем возможные варианты значений характеристических чисел. В зависимости от знака подкоренного выражения $(a+d)^2 - 4(ad-bc)$ корни характеристического уравнения могут принимать как действительные, так и комплексные значения.

1) Оба корня характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ принимают действительные значения, если выполнено неравенство:

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) \geq 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 \geq 4(ad-bc). \quad (4.9)$$

а) Если $(ad-bc) < 0$,

то неравенство (4.9) всегда верно. Более того,

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) > (a+d)^2,$$

а это означает, что

$$\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} > |(a+d)|.$$

То есть, в выражении (4.8) к величине $(a+d)$ прибавляется (или из нее вычитается) бóльшая величина

$\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}$. Таким образом, два характеристических корня λ_1 и λ_2 будут всегда разных знаков.

б) Если $(ad-bc) > 0$,

то для того, чтобы оба характеристических корня были действительными, должно выполняться неравенство

$$(a+d)^2 \geq 4(ad-bc).$$

В этом случае выполняется неравенство

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) < (a+d)^2 \text{ и}$$

$$\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} < |(a+d)|.$$

То есть, в выражении (4.8) к величине $(a+d)$ прибавляется (или из нее вычитается) меньшая величина $\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}$. Таким образом, два характеристических корня λ_1 и λ_2 будут всегда одного знака. Причем знак будет совпадать со знаком выражения $(a+d)$.

2) Оба корня характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ принимают комплексно-сопряженные значения, если выполнено неравенство:

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 < 4(ad-bc).$$

В этом случае характеристические числа задаются формулой:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((a+d) \pm i \cdot \sqrt{|(a+d)^2 - 4(ad-bc)|} \right) = u \pm i \cdot v.$$

Итак, характеристические числа могут быть:

- 1) действительными разных знаков,
- 2) действительными одного знака,
- 3) комплексно сопряженными,
а также, в вырожденных случаях,
- 4) чисто мнимыми,
- 5) действительными совпадающими,
- 6) действительными, одно из которых (или оба) равно нулю.

Эти случаи определяют тип поведения решения системы ОДУ. В таблице 4.1 представлены соответствующие фазовые портреты¹.

Рассмотрим, какие фазовые траектории (поведение решения системы уравнений) имеют место в случаях 1–4.

- 1) При действительных значениях $\lambda_{1,2}$ каждое слагаемое в выражениях для общего решения (4.7) системы дифференциальных уравнений представляет собой монотонную функцию, возрастающую (для положительного значения λ) или убывающую (для отрицательного значения λ). В данном случае в общую формулу и для $x(t)$, и для $y(t)$ входит один возрастающий и один убывающий член. Таким образом, на временном интервале от $-\infty$ до $+\infty$ фазовые траектории всегда будут сначала приближаться к стационарной точке $(0,0)$, а затем от нее удаляться. Стационарное состояние в этом случае – неустойчивое, а тип поведения фазовых траекторий называется *седло*.

¹ Определение терминов *фазовый портрет* и *фазовая траектория*, а также методы построения фазового портрета – см. Семинар 5.

2) При положительных значениях $\lambda_{1,2}$ решение (4.7) системы представляет собой монотонную функцию, каждая входящая в него экспонента возрастает. С течением времени фазовые траектории удаляются от стационарной точки $(0,0)$. Такой тип поведения фазовых траекторий называется **неустойчивый узел**; при отрицательных значениях $\lambda_{1,2}$ решение (4.7) системы представляет собой монотонную функцию, каждая входящая в него экспонента убывает. С течением времени фазовые траектории стремятся к стационарной точке $(0,0)$. Такой тип поведения фазовых траекторий называется **устойчивый узел**.

3) Пусть корни характеристического уравнения принимают комплексно-сопряженные значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((a+d) \pm i \cdot \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} \right) = u \pm i \cdot v.$$

Тогда решение системы, например для $x(t)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{t(u+i \cdot v)} + C_2 e^{t(u-i \cdot v)} = C_1 e^{tu} e^{i \cdot vt} + C_2 e^{tu} e^{-i \cdot vt} = \\ &= e^{tu} (C_1 e^{i \cdot vt} + C_2 e^{-i \cdot vt}) = e^{tu} \cdot (C_1 (\cos vt + i \sin vt) + C_2 (\cos vt - i \sin vt)), \end{aligned}$$

или

$$x(t) = e^{tu} \cdot ((C_1 + C_2) \cdot \cos vt + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin vt). \quad (4.10)$$

Значение функции $x(t)$ в каждый момент времени t является действительным, поэтому в правой части выражения (4.10) должно быть так же действительное выражение. Это требование будет выполнено, если мнимая часть

$$(C_1 - C_2) \cdot e^{tu} \cdot \sin vt = 0$$

для любого t , а действительная часть

$$(C_1 + C_2) \cdot e^{ut} \cdot \cos vt \neq 0.$$

Такая ситуация возможна в двух случаях:

а) константы C_1 и C_2 действительные и $C_1 = C_2$. Тогда решение имеет вид

$$x(t) = 2C_1 e^{ut} \cos vt \quad (4.11)$$

б) константы C_1 и C_2 – комплексно-сопряженные, т.е. их можно представить в виде: $C_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $C_2 = \alpha_1 - i\beta_1$. Тогда решение имеет вид

$$x(t) = 2e^{ut} \cdot (\alpha_1 \cos vt - \beta_1 \sin vt) \quad (4.12)$$

Первый множитель в выражениях (4.11 – 4.12) при $t \rightarrow \infty$ либо стремится к бесконечности (при положительных значениях $u = a + d$), либо стремится к 0 (при отрицательных значениях $u = a + d$). Второй множитель является ограниченной величиной ($|\sin vt| \leq 1$, $|\cos vt| \leq 1$, α_1, β_1, C_1 – константы), значения которой меняются периодически. Таким образом, решение $x(t)$ либо бесконечно удаляется от стационарного состояния $\bar{x} = 0$, либо стремится к нему. Однако, в отличие от рассмотренных случаев 1) и 2), поведение решения $x(t)$ не является монотонным, представляет собой затухающие или нарастающие колебания (множитель e^{ut} обеспечивает либо постоянно уменьшающуюся, либо постоянно увеличивающуюся с течением времени амплитуду колебаний). Аналогичные рассуждения справедливы и для функции-решения $y(t)$.

4) Пусть корни характеристического уравнения принимают чисто мнимые значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\pm i \cdot \sqrt{|(a+d)^2 - 4(ad-bc)|} \right) = \pm i \cdot \nu. \text{ Тогда, аналогично}$$

рассмотренному случаю 3) решение системы, например для $x(t)$, имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{i \cdot \nu t} + C_2 e^{-i \cdot \nu t} = C_1 (\cos \nu t + i \sin \nu t) + C_2 (\cos \nu t - i \sin \nu t),$$

или

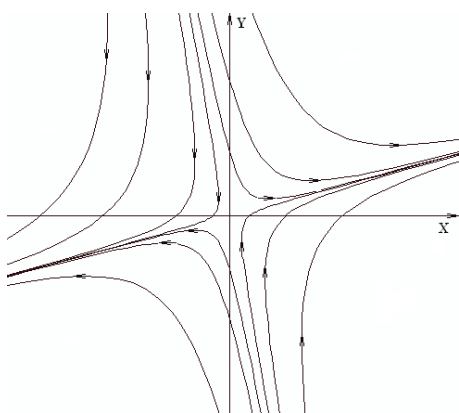
$$x(t) = (C_1 + C_2) \cdot \cos \nu t + i \cdot (C_1 - C_2) \cdot \sin \nu t,$$

$$x(t) = 2[\alpha_1 \cos \nu t - \beta_1 \sin \nu t] \text{ или } x(t) = 2C_1 \cos \nu t \quad (4.13)$$

Выражение в правой части (4.13) представляет собой ограниченную периодическую функцию. Амплитуда колебаний определяется константами α_1, β_1, C_1 . Таким образом, решение $x(t)$ совершает колебания около стационарного значения $\bar{x} = 0$, не удаляясь от него, но и не приближаясь (для каждой начальной точки амплитуда колебаний постоянна). Аналогичные рассуждения справедливы и для функции-решения $y(t)$.

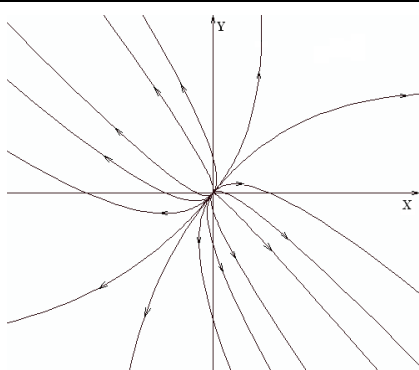
Таблица 4.1. Типы стационарных состояний системы двух линейных дифференциальных уравнений и соответствующие фазовые портреты.

1. $\lambda_{1,2}$ – действительные, разных знаков



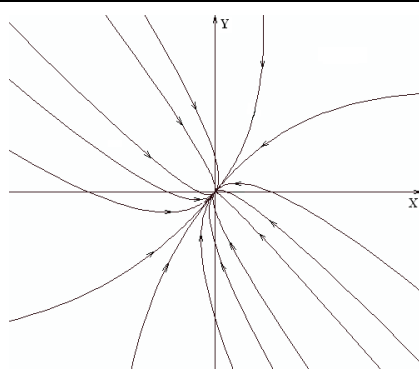
седло

2. $\lambda_{1,2}$ – действительные, одного знака



неустойчивый узел

$$\lambda_{1,2} > 0$$

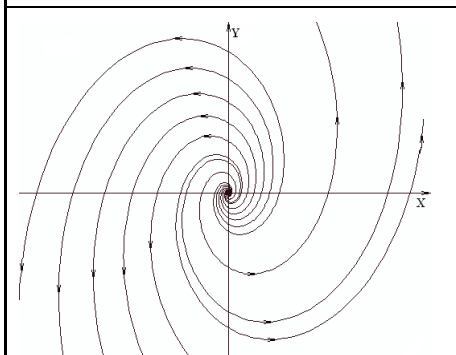


устойчивый узел

$$\lambda_{1,2} < 0$$

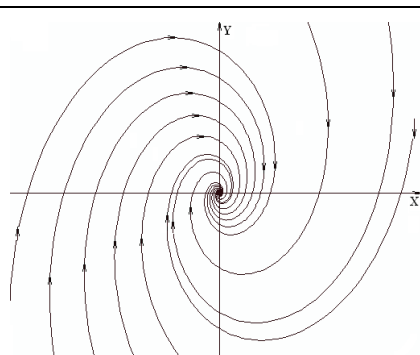
Таблица 4.1. Продолжение.

3. $\lambda_{1,2}$ – комплексные, вещественная часть отлична от нуля



неустойчивый фокус

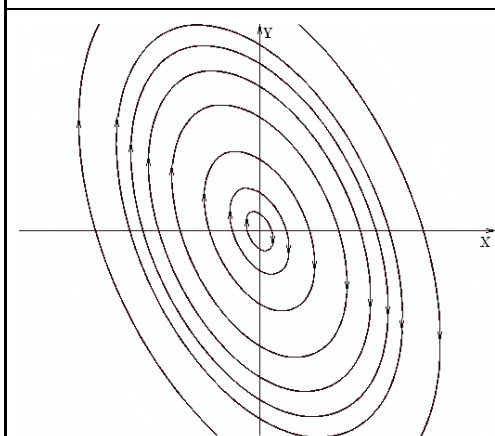
$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0$$



устойчивый фокус

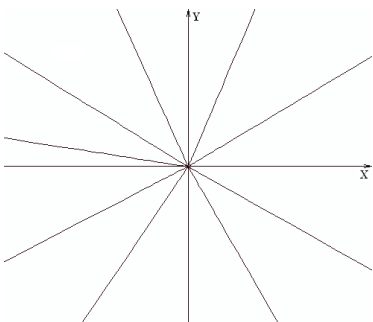
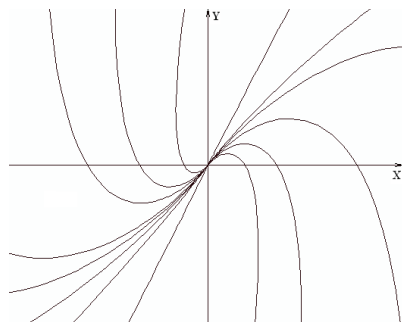
$$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$$

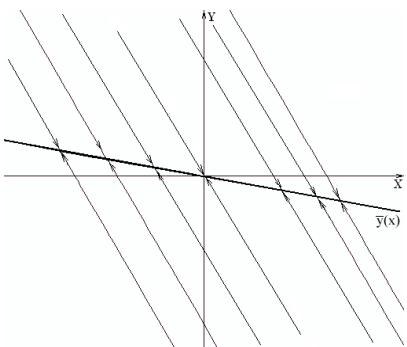
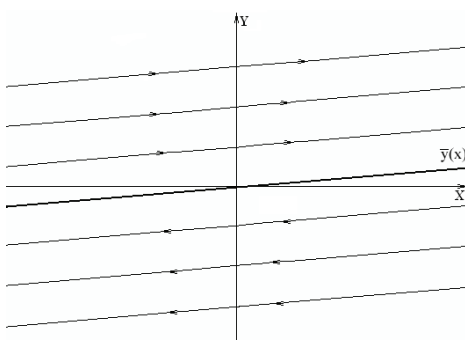
4. $\lambda_{1,2}$ – чисто мнимые



центр

Таблица 4.1. Окончание.

5. $\lambda_{1,2}$ – действительные, совпадающие	
	
<p>критический узел устойчивый или неустойчи- вый, система имеет вид</p> $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax, \\ \frac{dy}{dt} = ay \end{cases}$	<p>вырожденный узел устойчивый или неустойчивый</p>

6. λ_1 – действительный, $\lambda_2 = 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	
	
<p>$\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ особыми точками являют- ся все точки прямой $\bar{y}(x)$</p>	<p>$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ особыми точками являются все точки прямой $\bar{y}(x)$</p>

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 4

4.1. Определите тип особой точки системы линейных уравнений:

$$\text{№ 1} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases}$$

$$\text{№ 2} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

$$\text{№ 3} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$\text{№ 4} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}$$

$$\text{№ 5} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$$\text{№ 6} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

$$\text{№ 7} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}$$

$$\text{№ 8} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y \end{cases}$$

$$\text{№ 9} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

$$\text{№ 10} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -6x - 5y \end{cases}$$

$$\text{№ 11} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$$\text{№ 12} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$$

$$\text{№ 13} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

$$\text{№ 14} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = -6x + 4y \end{cases}$$

$$\text{№ 15} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 2y \end{cases}$$

$$\text{№ 16} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

$$\text{№ 17} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

$$\text{№ 18} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$