

СЕМИНАРЫ 5 И 6

Система двух автономных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Фазовая плоскость. Изоклины. Построение фазовых портретов. Кинетические кривые. Знакомство с программой TRAX.

Фазовой плоскостью называется плоскость с осями координат, на которых отложены значения переменных x и y , каждая точка плоскости соответствует определенному состоянию системы. Совокупность точек на фазовой плоскости, положение которых соответствует состояниям системы в процессе изменения во времени переменных $x(t)$, $y(t)$ согласно заданным уравнениям исследуемой системы, называется **фазовой траекторией**. Совокупность фазовых траекторий при различных начальных значениях переменных дает портрет системы. Построение **фазового портрета** позволяет сделать выводы о характере изменений переменных x и y без знания аналитических решений исходной системы уравнений.

Для построения фазового портрета на фазовую плоскость наносят изоклины (**метод изоклин**). **Изоклина** — линия на плоскости, в каждой точке которой, касательные к фазовым траекториям исследуемой системы уравнений имеют один угол наклона.

Пусть уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (5.1)$$

Тогда **уравнение изоклины** запишется как:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = A = const. \quad (5.2)$$

В уравнении (5.2) константа A есть тангенс угла наклона $A = \operatorname{tg} \varphi$ касательной к фазовой траектории. Через **главные изоклины** (нуль-изоклины) фазовые траектории проходят под углом $\varphi = 0^\circ$ (**изоклина горизонтальных касательных**) и $\varphi = 90^\circ$ (**изоклина вертикальных касательных**). Для изоклины горизонтальных касательных уравнение (5.2.) принимает вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \operatorname{tg} 0^\circ = 0 \text{ или } Q(x, y) = 0;$$

для изоклины вертикальных касательных:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \operatorname{tg} 90^\circ = \infty \text{ или } P(x, y) = 0.$$

Все изоклины пересекаются в особой точке (\bar{x}, \bar{y}) , для которой $Q(\bar{x}, \bar{y}) = P(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy = Q(x, y). \end{cases} \quad (5.3)$$

Построение фазового портрета начинаем с построения **главных изоклин**. Для системы двух линейных уравнений – это всегда прямые, проходящие через начало координат. Уравнение **изоклины горизонтальных касательных**:

$Q(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{c}{d}x$. Уравнение **изоклины вертикальных касательных**:

$P(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x$. Для дальнейшего построения фазового портрета полезно построить изоклину касательных, проходящих под углом $\varphi = \pm 45^\circ$.

Для нахождения соответствующего уравнения изоклины необходимо решить уравнение

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \Leftrightarrow \frac{cx + dy}{ax + by} = \pm 1$. Мож-

но находить и изоклины касательных других углов, пользуясь приблизительными значениями тангенсов углов. В построении фазового портрета также может помочь ответ на вопрос, под каким углом фазовые траектории должны пересекать координатные оси. Для этого в уравнение изоклины

$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{cx + dy}{ax + by} = \operatorname{tg} \varphi$ подставляем

соответствующие равенства $x = 0$ (для определения угла пересечения с осью ОУ) и $y = 0$ (для определения угла пересечения с осью ОХ).

Рассмотрим примеры построения фазового и кинетического портрета поведения траекторий системы вблизи особой точки. Построить кинетический портрет системы – означает построить графики зависимости величин переменных x, y от времени. По фазовому портрету можно построить кинетический, и наоборот. Одной фазовой траектории соответствует одна пара кинетических кривых $x(t), y(t)$.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

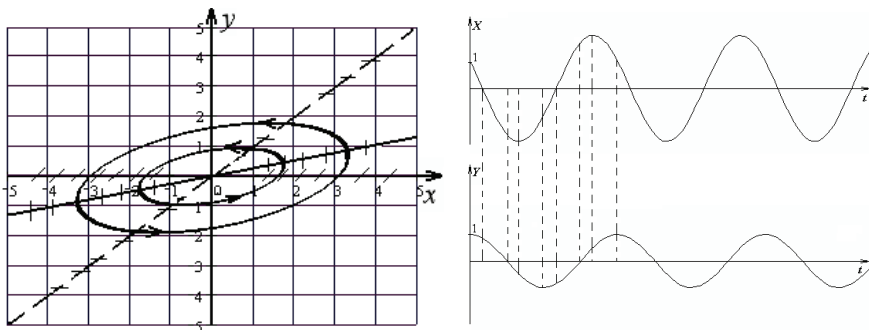


Рис. 5.1. Фазовый и кинетический портреты системы, пример 5.1.

Координаты особой точки – $(0,0)$. Коэффициенты линейных уравнений равны: $a=1$, $b=-4$, $c=1$, $d=-1$. Определим тип стационарного состояния (см. *Семинар 4*, стр. 51):

$$(a + d) = (1 - 1) = 0,$$

$$ad - bc = 1 \cdot (-1) - (-4) \cdot (1) = 3,$$

$$\sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} = \sqrt{0 - 4 \cdot 3} = i\sqrt{12}.$$

Таким образом, характеристические корни являются мнимыми: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$, следовательно, особая точка рассматриваемой линейной системы имеет тип «центр».

Уравнение изоклины горизонтальных касательных: $y = x$, уравнение изоклины вертикальных касательных:

$y = \frac{1}{4}x$. Найдем уравнение изоклины, которую траектории

системы пересекают под углом в 45° к оси абсцисс:

$$\frac{x-y}{x-4y} = 1, \quad x-y = x-4y, \quad y=0.$$

После построения фазового портрета необходимо определить направление движения по найденным траекториям. Это можно сделать следующим образом. Возьмем произвольную точку на любой траектории. Например, на изоклине горизонтальных касательных $(1,1)$. Подставим координаты этой точки в систему уравнений. Получим выражения для скоростей изменения переменных x, y в этой точке:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - 4 \cdot 1 = -3, \\ \frac{dy}{dt} = 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получившиеся значения нам показывают, что скорость изменения переменной x – отрицательная, то есть ее значение должно уменьшаться, а переменная y – не изменяется. Отмечаем полученное направление стрелкой (против часовой стрелки). Таким образом, в рассматриваемом примере движение по фазовым траекториям направлено против часовой стрелки.

Подставляя в систему уравнений координаты разных точек, можно получить «карту» векторов, задающих направление и скорость движения изображающей точки по фазовой кривой, так называемое векторное поле.

Отметим, что на изоклине горизонтальных касательных переменная y достигает своего максимального или минимального значения на данной траектории. Наоборот, на изоклине вертикальных касательных, своего максимального по модулю значения для выбранной траектории достигает переменная x .

ПРИМЕР 5.1. Окончание.

Перейдем к построению кинетического портрета системы. Выберем на фазовом портрете произвольную точку на произвольной фазовой траектории. Это начальная точка, соответствующая моменту времени $t=0$. В зависимости от направления движения в рассматриваемой системе значения переменных x, y либо уменьшаются, либо увеличиваются. Пусть координаты начальной точки – $(1,1)$. Стартуя из этой точки, мы должны двигаться против часовой стрелки, координаты x и y уменьшаются. Координата x проходит через 0, значение y при этом положительно. Далее координаты x и y продолжают уменьшаться, координата y проходит через 0 (значение x при этом отрицательно). Величина x достигает минимального значения на изоклине вертикальных касательных, затем начинает увеличиваться. Величина y своего минимального значения достигает на изоклине горизонтальных касательных (значение x в этот момент времени отрицательно). Далее и величина x , и величина y увеличиваются, возвращаясь к начальным значениям.

ПРИМЕР 5.2. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

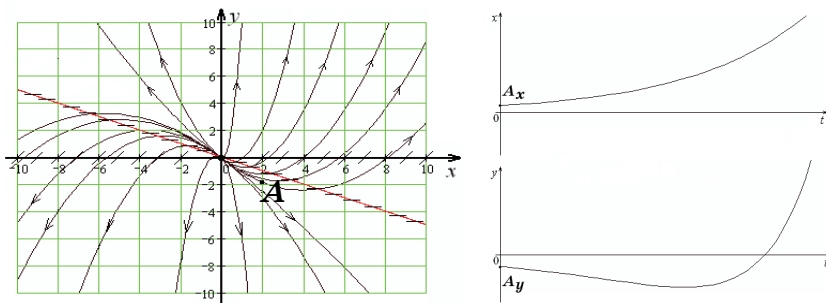


Рис. 5.2. Фазовый и кинетический портреты системы, пример 5.2.

Координаты особой точки – $(0,0)$. Тип особой точки – «неустойчивый узел». Уравнение изоклины горизонтальных касательных: $y = -\frac{1}{2}x$, уравнение изоклины вертикальных касательных: $x = 0$. Найдем уравнение изоклины, которую траектории системы пересекают под углом в 45° к оси абсцисс:

$$\frac{x}{x+2y} = 1, \quad x = x + 2y, \quad y = 0 \quad (\text{рис. 5.2}).$$

Направление движения по траекториям можно определить аналитически по знаку $(a+d)$ (устойчивая или неустойчивая точка) или методом векторного поля.

Кинетический портрет строится с помощью рассуждений, аналогичных предыдущему случаю. В качестве начальной точки выбрана точка A с координатами (A_x, A_y) .

ПРИМЕР. 5.3. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -3x - y. \end{cases}$$

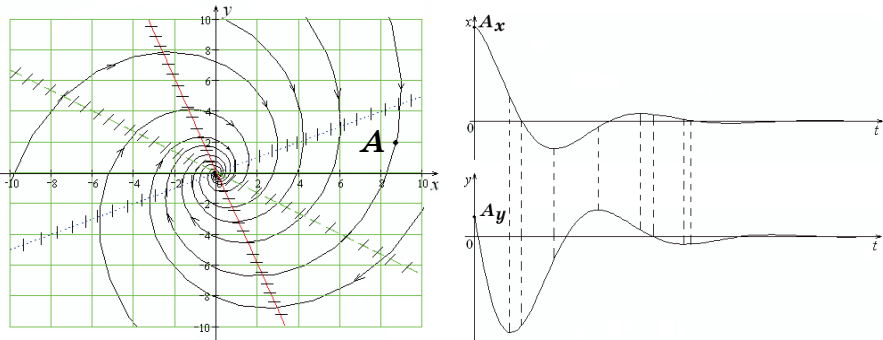


Рис. 5.3. Фазовый и кинетический портреты системы, пример 5.3.

Координаты особой точки – $(0,0)$. Тип особой точки – «устойчивый фокус». Уравнение изоклины горизонтальных касательных: $y = -3x$, уравнение изоклины вертикальных касательных: $y = \frac{1}{2}x$. Найдем уравнение изоклины, которую траектории системы пересекают под углом в 45° к оси абсцисс:

$$\frac{-x + 2y}{-3x - y} = 1, \quad -x + 2y = -3x - y, \quad y = -\frac{2}{3}x \quad (\text{рис. 5.3}).$$

Аналогично случаю с узлом направление движения по траекториям можно определять аналитически по знаку $(a + d)$ (устойчивая или неустойчивая точка) или методом векторного поля.

Кинетический портрет строится с помощью рассуждений, аналогичных предыдущему случаю. В качестве начальной точки выбрана точка A с координатами (A_x, A_y) .

ПРИМЕР 5.4. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y. \end{cases}$$

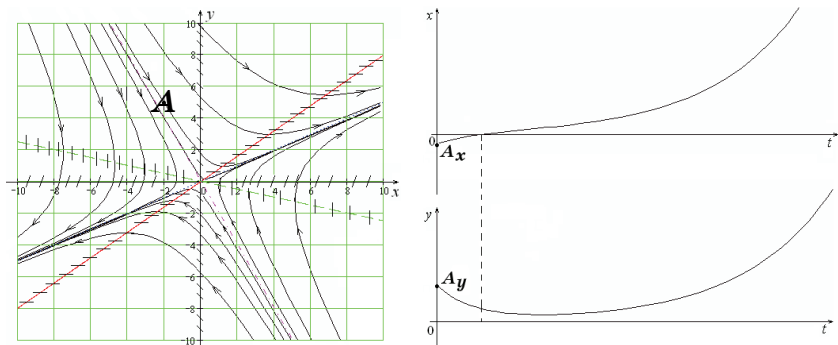


Рис. 5.4. Фазовый и кинетический портреты системы, пример 5.4.

Координаты особой точки – $(0,0)$. Тип особой точки – «седло». Уравнение изоклины горизонтальных касательных:

$$y = \frac{4}{5}x, \quad \text{уравнение изоклины вертикальных касательных:}$$

$$y = -\frac{1}{4}x.$$

Определим, под каким углом фазовые траектории пересекают оси координат.

$$\left. \frac{dy}{dx} = \frac{4x - 5y}{x + 4y} \right|_{x=0} = -\frac{5}{4} = -1.25 \approx \text{tg}(-52^\circ), \quad \text{т.е. ось } OY \text{ фазовые}$$

траектории должны пересекать под углом примерно -52° (рис. 5.4),

$$\left. \frac{dy}{dx} = \frac{4x - 5y}{x + 4y} \right|_{y=0} = 4 \approx \text{tg}75^\circ, \quad \text{т.е. ось } OX \text{ фазовые траектории}$$

должны пересекать под углом примерно 75° .

Важной характеристикой фазового портрета особой точки типа «седло» являются две сепаратрисы. Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы коэффициентов линейных уравнений системы: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Напомним, что собственным вектором матрицы M , соответствующим собственному числу λ , называется любой отличный от нуля вектор \vec{x} , который удовлетворяет уравнению $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Итак, уравнения прямых-сепаратрис задаются уравнениями

1) $(a - \lambda_{1,2}) \cdot x + b \cdot y = 0$ или

2) $c \cdot x + (d - \lambda_{1,2}) \cdot y = 0$,

где $\lambda_{1,2}$ – характеристические числа матрицы коэффициентов системы. Одному значению λ соответствует одна прямая (выражения 1 и 2 задают совпадающие прямые). Сепаратрисы могут совпадать с главными изоклинами. Кроме того, в роли сепаратрис могут выступать оси координат: например, если коэффициент $b = 0$, то из уравнения $(a - \lambda_{1,2}) \cdot x + 0 \cdot y = 0$ получаем уравнение сепаратрисы $x = 0$ (ось OY); если характеристическое число λ совпадает, например, с коэффициентом $a = \lambda$, то получаем уравнение $0 \cdot x + b \cdot y = 0$, из которого следует, что прямая $y = 0$ (ось OX) является сепаратрисой.

ПРИМЕР 5.4. Окончание.

В разбираемом примере характеристические числа равны $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left((1-5) \pm \sqrt{(1-5)^2 - 4 \cdot (1 \cdot (-5) - 4 \cdot 4)} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Уравнения сепаратрис задаются уравнениями: $(1-3)x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$ и $(1-(-7))x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$. Убедимся, что вторая пара выражений даст те же уравнения сепаратрис: $4x + ((-5)-3)y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$ и $4x + ((-5)-(-7))y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$.

Итак, получаем $y = \frac{x}{2}$, $y = -2x$ – уравнения сепаратрис.

Кинетический портрет строится с помощью рассуждений, аналогичных предыдущему случаю. В качестве начальной точки выбрана точка A с координатами (A_x, A_y) .

На что необходимо обратить внимание: особая точка типа «седло» – всегда неустойчива. На больших временах фазовые траектории уходят в бесконечность или, при соответствующем расположении сепаратрис, асимптотически стремятся к одной из осей координат.

На практических занятиях для компьютерного построения фазовых и кинетических портретов мы используем программу *TRAX*. В качестве рабочей программы можно также использовать *MathCad*, *MatLab* (коммерческие программы), *XPP/WinPP*, *Octave*, *Scilab* (свободно распространяемые программы) и другие программные средства.

ПАМЯТКА ДЛЯ РАБОТЫ В ПРОГРАММЕ TRAX

Создание модели

- 1) Выбрать пункт меню «Differential equations» (стрелкой «вниз»), **Enter**.
- 2) Нажать клавишу **Insert** и ввести имя новой модели, **Enter**.
- 3) Ввести уравнения. Параметры модели обозначаются только символами $p_0, p_1 \dots p_9$.

Работа с моделями

- 1) Перемещение по окну параметров осуществляется с помощью клавиш **Page Up, Page Down**.
- 2) Для того, чтобы задать значение параметра, необходимо установить курсор в нужную строчку, ввести численное значение и нажать клавишу **Enter**.
- 3) Изменить начальное положение курсора на фазовой плоскости или в окне кинетической кривой можно с помощью стрелок «вверх», «вниз», «вправо», «влево». Для увеличения шага после выбора направления нажать клавишу **Tab**.
- 4) Для просмотра уравнений нажмите **Shift+F1**.

Построение графиков

- F10** строить фазовую или кинетическую кривую в прямом времени
- F9** строить фазовую или кинетическую кривую в обратном времени
- F8** построить оси координат
- F7** очистить окно
- Esc** остановить счет (при отжатой клавише **Num Lock**)
- Для переключения между окном «фазовая плоскость» (плоскость $Y(X)$) и окном «кинетика» ($X(t), Y(t)$) в окне параметров переключаться между значениями **window 1** и **window 2**.

Завершение работы

- F3** сохранение построенного графика
- F2** выход из программы

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРАМ 5 И 6

5.1. Постройте фазовый портрет для каждой из систем задачи 4.1 в окрестности стационарного состояния:

- а)** отметьте стационарную точку на фазовой плоскости;
- б)** постройте главные изоклины систем, изоклины $\pm 45^\circ$;
- в)** определите, под каким углом фазовые траектории должны пересекать оси координат фазовой плоскости;
- г)** по изоклинам постройте эскиз фазового портрета, стрелкой укажите направление движения изображающей точки вдоль интегральных кривых при $t \rightarrow \infty$.

5.2. Для произвольной начальной точки на фазовом портрете задачи 5.1. постройте кинетический портрет.